

GEOMETRIJA ENERGIJSKOG SUSTAVA STOŽACA I PIRAMIDA – 2. dio

dr.sc. Ivan Šimatović, dipl.ing.el., Hrvatska

Izvaci iz rukopisa knjige *Osnove energijskog sustava stožaca i piramida*

Αγεωμέτρητος μηδείς είσιτω

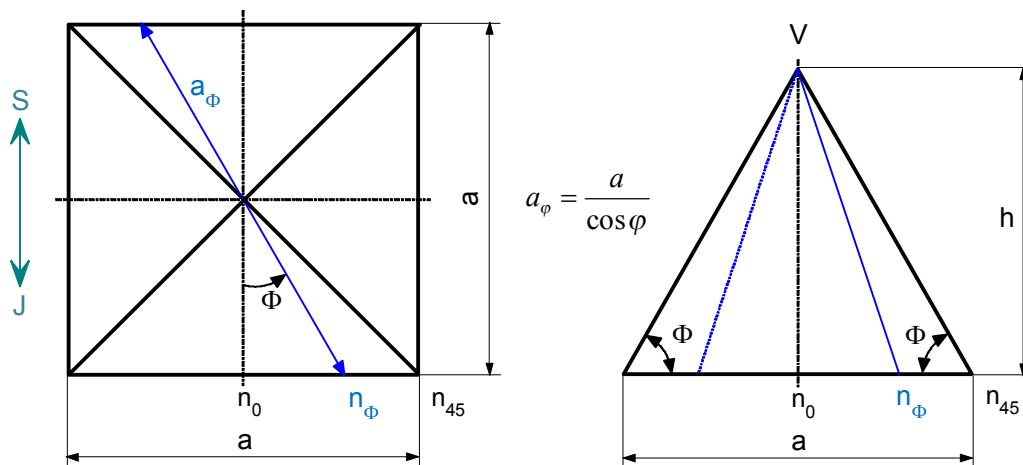
(Neka ne ulazi tko ne zna geometriju)

Uklesani natpis s ulaza Platonove akademije

Varijabilnost hiperindeksa loma piramide

Valja uočiti da uspravan stožac s kružnom osnovicom, kao idealno osno simetrično tijelo, ima za svaku izvodnicu plašta, neovisno o njezinom tlocrtnom kutu φ prema osi S-J, uvijek isti hiperindeks loma n_H za skalarnu mikrovalove, dok se za uspravnu četverostranu piramidu on razlikuje od izvodnice do izvodnice, ovisno o njezinom tlocrtnom kutu φ prema vertikalnoj osi. Hiperindeks loma piramide najveći je za najkraću (najstrmiju) izvodnicu koja se podudara s visinom trokuta plašta ($\varphi = 0^\circ$) i ima najveći prikloni kut prema osnovici, a najmanji je za najdulju (najpoloženiju) izvodnicu - brid piramide ($\varphi = 45^\circ$) koji ima najmanji prikloni kut prema osnovici.

Na slici 1 prikazana je u tlocrtu i nacrtu četverostrana piramida s kvadratnom osnovicom presječena vertikalnom ravninom pod kutom φ prema osi simetrije S-J i pripadne izvodnice na nasuprotnim trokutnim plohama plašta.



Slika 1 – Tlocrt i nacrt uspravne četverostrane piramide presječene vertikalnom ravninom pod kutom φ prema osi simetrije S-J

Za izvodnice nasuprotnih ploha plašta piramide koje su, tlocrtno gledano, zakrenute za kut φ prema ravnini (osi) simetrije S-J hiperindeks loma za skalarnu mikrovalove iznosi

$$n_{H\varphi} = \frac{1}{\cos \alpha_\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a_\varphi}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a}\right)^2 \cdot \cos^2 \varphi} \quad , \quad \varphi \in [0^\circ, 45^\circ]$$

Pri tome je:

$$n_{H0} = f\left(\frac{h}{a}, 0^0\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a}\right)^2 \cdot 1^2} = \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2} = n_{H \max}$$

$$n_{H45} = f\left(\frac{h}{a}, 45^0\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2} = n_{H \min}$$

Prva vrijednost $n_{H0} = n_{H \max}$ je nazivni hiperindeks loma uspravne četverostrane piramide i odnosi se na najkraću izvodnicu njezina plašta, koja je jednaka visini trokutne plohe. Druga manja vrijednost n_{H45} je hiperindeks loma brida piramide.

Omjer $(2 \cdot h/a)^2$ osnovnih dimenzija piramide može se iskazati zamjenskim izrazom

$$\left(\frac{2 \cdot h}{a}\right)^2 = n_{H0}^2 - 1$$

pa se, koristeći tu supstituciju, za određivanje hiperindeksa loma izvodnice njezina plašta tlocrtno zakrenute za kut φ prema osi simetrije S-J dobiva opći izraz u podesnijem obliku

$$n_{H\varphi} = f(n_{H0}, \varphi) = \sqrt{1 + (n_{H0}^2 - 1) \cdot \cos^2 \varphi} \quad , \quad \varphi \in [0^0, 45^0]$$

koji eksplicitno ne sadrži osnovne dimenzije piramide a i h .

Shodno tom izrazu iznos hiperindeksa loma izvodnica plašta uspravne četverostrane piramide, čiji je nazivni hiperindeks loma za skalarnе mikrovalove n_{H0} , kreće se, općenito uzevši, u intervalu

$$n_{H\varphi} \in \left[\sqrt{(n_{H0}^2 - 1)/2}, n_{H0} \right].$$

Za Veliku piramidu i piramidne modele izrađene u njezinim proporcijama, čiji je nazivni hiperindeks loma $n_{H0} = \Phi = 1,618\dots$, on se kreće u rasponu

$$n_{H\varphi} \in [1,345, 1,618].$$

Srednja vrijednost hiperindeksa loma uspravne četverostrane piramide s kvadratnom osnovicom može se egzaktno izračunati određenim integralom

$$n_{Hsr} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \cdot \int_0^{\pi/4} n_{H\varphi} \cdot d\varphi = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (n_{H0}^2 - 1) \cdot \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

Supstitucijom $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ taj se određeni integral svodi u lakše prepoznatljiv standardni Legendreov oblik

$$n_{Hsr} \doteq \frac{4 \cdot n_{H0}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \frac{n_{H0}^2 - 1}{n_{H0}^2} \cdot \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \frac{4 \cdot n_{H0}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \frac{4 \cdot n_{H0}}{\pi} \cdot E\left(k, \frac{\pi}{4}\right).$$

U višoj matematici je izraz $E\left(k, \frac{\pi}{4}\right)$ uobičajen simbol za nepotpuni eliptički integral druge vrste koji nije egzaktno rješiv u konačnom obliku iskazanom elementarnim funkcijama. Njegov modul $k < 1$ određen je izrazom

$$k = \frac{\sqrt{n_{H0}^2 - 1}}{n_{H0}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n_{H0}^2}} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

u kojem je α prikloni kut trokutnih ploha plašta piramide prema osnovici.

Danas je najpraktičnije i najlakše srednju vrijednost hiperindeksa loma piramide izračunati na PC-u pomoću tabličnog kalkulatora prema nadomjesnom približnom aritmetičkom izrazu u općem obliku

$$n_{Hsr} \doteq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n n_{H\varphi_i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (n_{H0}^2 - 1) \cdot \cos^2 \varphi_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

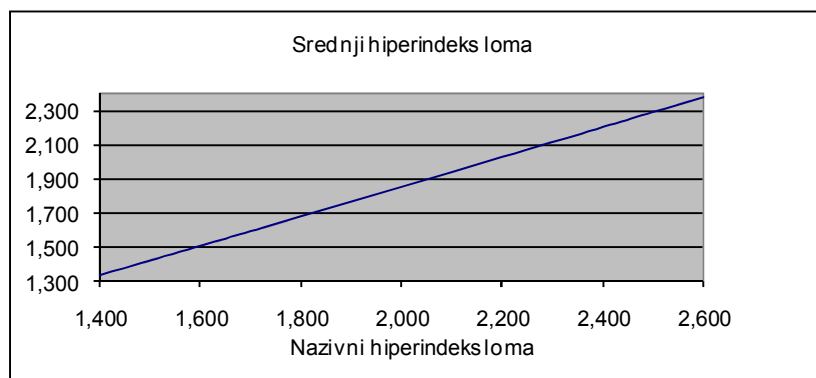
u kojem je parametar njezin nazivni hiperindeks loma $n_{H0} = 1/\cos \alpha$.

Ako se kut φ mijenja u granicama od 0^0 do 45^0 s korakom $\Delta\varphi = 1^0$ dobiva se za proračun dovoljno točan brojčani izraz

$$n_{Hsr} \doteq \frac{1}{46} \cdot \sum_{\varphi=0^0}^{\varphi=45^0} n_{H\varphi} = \frac{1}{46} \cdot \sum_{i=0}^{i=45} \sqrt{1 + (n_{H0}^2 - 1) \cdot \cos^2 i} \quad , \quad \varphi_i = i = 0^0, 1^0, 2^0, 3^0, \dots, 45^0$$

Rezultati proračuna n_{Hsr} po tom izrazu, za niz vrijednosti n_{H0} kao parametru, navedeni su tablično i prikazani su dijagramom koji je izrazito linearan ($r = 0,99998$).

n_{H0}	1,400	1,500	1,618	1,700	1,800	1,900	2,000	2,100	2,200	2,300	2,414	2,500	2,600
n_{Hsr}	1,334	1,420	1,521	1,592	1,679	1,766	1,853	1,940	2,028	2,116	2,217	2,292	2,381

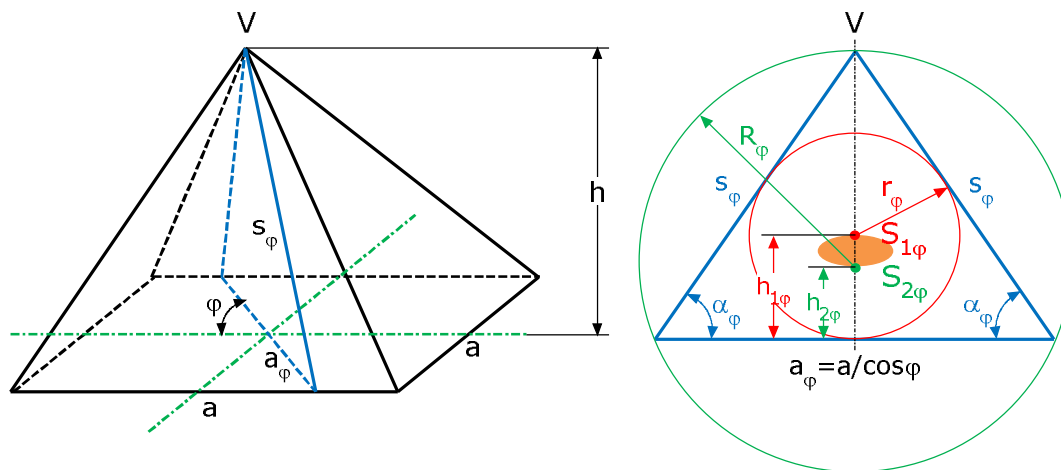


Iz dijagrama rasprostiranja navedenih parova vrijednosti $\{(n_{H0}, n_{Hsr})_i\}$ dobiva se metodom najmanjih kvadrata za određivanje srednje vrijednosti hiperindeksa loma četverostrane uspravne piramide dovoljno točan približan izraz u linearnom obliku

$$n_{Hsr} = f(n_{H0}) \doteq 0,1099 + 0,8724 \cdot n_{H0} \quad , \quad n_{H0} \in (1,4, 2,6)$$

Za Veliku piramidu i piramidne modele izrađene u njezinim proporcijama, čiji je nazivni hiperindeks loma $n_{H0} = \Phi = 1,618\dots$, pripadni $n_{Hsr} = 1,521$, dok je za piramidu za sušenje, o kojoj će biti više riječi u sljedećem poglavlju, čiji je $n_{H0} = 2,414\dots$ pripadni $n_{Hsr} = 2,217$.

Geometrija energijskog sustava piramide



Slika 2 – Uspravna četverostrana piramida s kvadratnom osnovicom te naznačenim osnovnim dimenzijama i zonom djelovanja usredotočenog mikrovalnog polja u trokutu jednog kosog poprečnog presjeka

Uspravna četverostrana piramida s kvadratičnom osnovicom je simetrično tijelo koje se može predočiti kao pramen različitih uspravnih jednakokračnih trokuta jednake visine i različitih osnovica, koji se sijeku po njezinoj vertikalnoj osi. Stoga usredotočeno rezultirajuće mikrovalno polje, koje u određenim okolnostima spontano djeluje u središnjoj zoni piramide, nastaje superpozicijom parcijalnih polja tog pramena trokuta.

Pozicija središta $S_{1\varphi}$ upisane kružnice iznad osnovice a_φ jednakokračnog trokuta poprečnog presjeka piramide tlocrtno zakrenutog za kut $\varphi \leq 45^\circ$ je

$$h_{1\varphi} = r_\varphi = \frac{h}{1 + n_{H\varphi}}$$

Polumjer R_φ opisane kružnice oko tog trokuta je

$$R_\varphi = \frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H\varphi}^2}{n_{H\varphi}^2 - 1}$$

Prema slici 2 pozicija središta $S_{2\varphi}$ opisane kružnice jednakokračnog trokuta od njegove osnovice a_φ je

$$h_{2\varphi} = h - R_\varphi = h - \frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H\varphi}^2}{n_{H\varphi}^2 - 1} = \frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H\varphi}^2 - 2}{n_{H\varphi}^2 - 1}$$

Ono se može nalaziti – ovisno o pripadnoj vrijednosti hiperindeksa loma $n_{H\varphi}$ – iznad osnovice ($h_{2\varphi} > 0$), na osnovici ($h_{2\varphi} = 0$) ili ispod osnovice ($h_{2\varphi} < 0$).

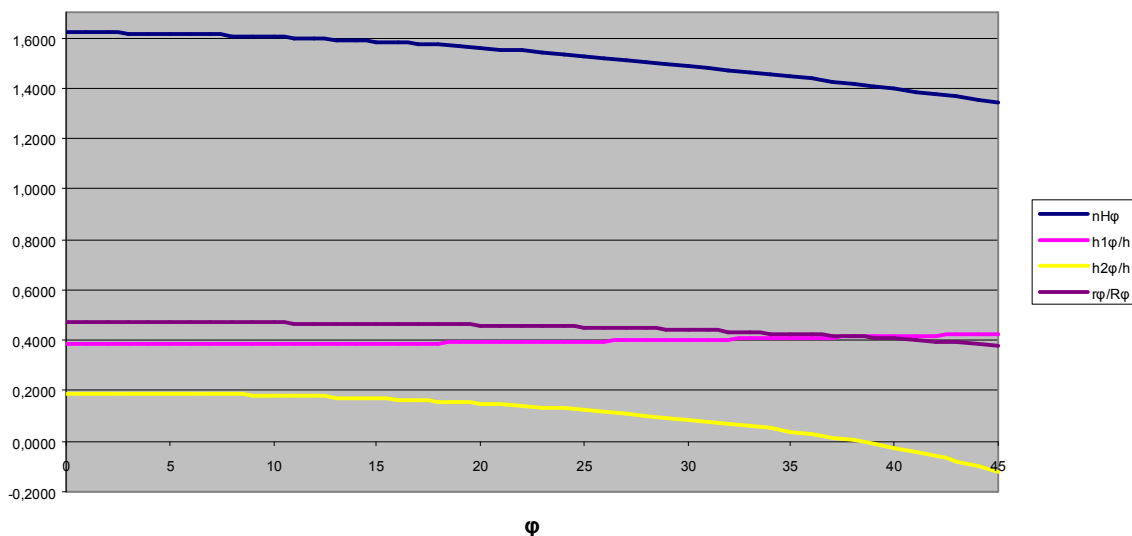
Kao bezdimenzijski pokazatelj koji je proporcionalan prosječnoj jakosti usredotočenog mikrovalnog polja unutar promatranog jednakokračnog trokuta također služi omjer polumjera r_φ/R_φ njegove upisane i opisane kružnice.

$$\gamma_\varphi = \frac{r_\varphi}{R_\varphi} = \frac{\frac{h}{1+n_{H\varphi}}}{\frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H\varphi}^2}{n_{H\varphi}^2-1}} = 2 \cdot \frac{n_{H\varphi}-1}{n_{H\varphi}^2}$$

Tablica 1 – Elementi geometrije polja piramide za harmonizaciju ($n_{H0} = 1,618$) u ovisnosti o kutu poprečnog presjeka φ

φ	$n_{H\varphi}$	$H_{1\varphi}/h$	$h_{2\varphi}/h$	r_φ/R_φ
0°	1,6180	0,3820	0,1910	0,4721
5°	1,6142	0,3825	0,1886	0,4714
10°	1,6029	0,3842	0,1814	0,4693
15°	1,5842	0,3870	0,1688	0,4656
20°	1,5584	0,3909	0,1500	0,4599
25°	1,5261	0,3959	0,1238	0,4518
30°	1,4878	0,4020	0,0880	0,4407
35°	1,4442	0,4091	0,0395	0,4259
40°	1,3962	0,4173	-0,0266	0,4065
45°	1,3450	0,4264	-0,1180	0,3814

Ovisnosti pojedinih elemenata geometrije polja piramide za harmonizaciju o tlocrtnom kutu φ prema osi S-J trokuta poprečnog presjeka predložene su dijagramom.



Iz navedenih brojčanih podataka u tablici i pripadnih krivulja prikazanih u dijagramu razvidno je da se povećanjem kuta φ :

- središte $S_{1\varphi}$ upisane kružnice jednakokračnog trokuta, koje pobliže određuje gornju zonu usredotočenog mikrovalnog polja, blago pomiče naviše;
- središte $S_{2\varphi}$ opisane kružnice jednakokračnog trokuta, koje pobliže određuje donju zonu usredotočenog mikrovalnog polja, isprva blago a zatim sve brže pomiče naniže te naposljetku padne ispod razine osnove;

- razvučenost mikrovalnog polja povećava razmjerno s udaljenošću $|h_{1\varphi} - h_{2\varphi}|$ središta upisane i opisane kružnice $S_{1\varphi}$ i $S_{2\varphi}$.

Za četverostranu uspravnu piramidu je usredotočeno mikrovalno polje najjače duž vertikalne osi u rasponu kojeg određuju središta S_1 i S_2 opisane i upisane kružnice trokuta uz $\varphi = 0^0$. To je, naime, središnja zona rezultirajućeg usredotočenog mikrovalnog polja u kojoj se zbrajaju doprinosi parcijalnih polja svih izvodnica plašta. Uz poznatu visinu piramide i njezin nazivni hiperindeks loma n_{H0} taj je raspon određen općim izrazima:

$$h_{1\varphi=0^0} = \frac{h}{1+n_{H0}} \quad \text{i} \quad h_{2\varphi=0^0} = \frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H0}^2 - 2}{n_{H0}^2 - 1}$$

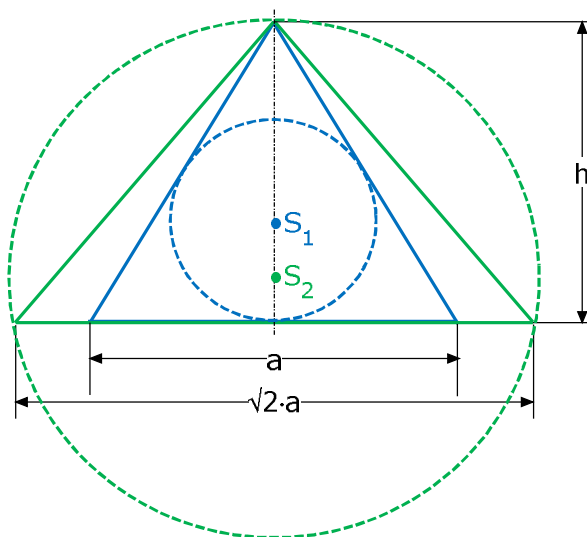
Za Veliku piramidu i piramidne modele izrađene u njezinim proporcijama, čiji je nazivni hiperindeks loma $n_{H0} = \Phi = 1,618\dots$, raspon središnje zone rezultirajućeg mikrovalnog polja unutar koje treba postaviti eksponirani uzorak je:

$$h_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{\Phi^2 - 2}{\Phi^2 - 1} = 0,191 \cdot h \quad \text{do} \quad h_1 = \frac{h}{1 + \Phi} = 0,382 \cdot h$$

Piramida za sušenje

U piramidotronici se do proporcija piramide za sušenje, koja ima najmanje razvučeno i stoga najjače usredotočeno mikrovalno polje, može doći na sličan način kao i kod stošca tako da se izjednači poziciju središta S_1 najmanje u nju upisane kružnice s pozicijom središta S_2 oko nje najveće opisane kružnice.

Kao što je vidljivo sa slike najmanja upisana kružnica u piramidu je uz $\varphi = 0^0$, a najveća opisana kružnica je uz $\varphi = 45^0$. Ona prolazi vrhom piramide i dvama dijagonalno suprotnim vrhovima njezine osnovice.



Slika 3 – Osn i dijagonalni vertikalni presjek ravne četverostrane piramide s najmanjom upisanom i najvećom opisanom kružnicom

U matematičkom zapisu uvjet za određivanje nazivnog hiperindeksa loma četverostrane uspravne piramide za sušenje glasi

$$h_{1\varphi=0^\circ} = h_{2\varphi=45^\circ} \Rightarrow \frac{h}{1+n_{H0}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{n_{H45}^2 - 2}{n_{H45}^2 - 1}$$

Dijeljenjem obje strane s h i supstitucijom $n_{H45} = \sqrt{1+(n_{H0}^2 - 1) \cdot \cos^2 45^\circ} = \sqrt{\frac{n_{H0}^2 + 1}{2}}$ izlazi

$$\frac{1}{1+n_{H0}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_{H0}^2 - 3}{n_{H0}^2 - 1} \Rightarrow n_{H0}^2 - 2 \cdot n_{H0} - 1 = 0.$$

Fizikalno smisljeno pozitivno rješenje te kvadratne jednadžbe je

$$n_{H0} = 1 + \sqrt{2} = 2,414\dots$$

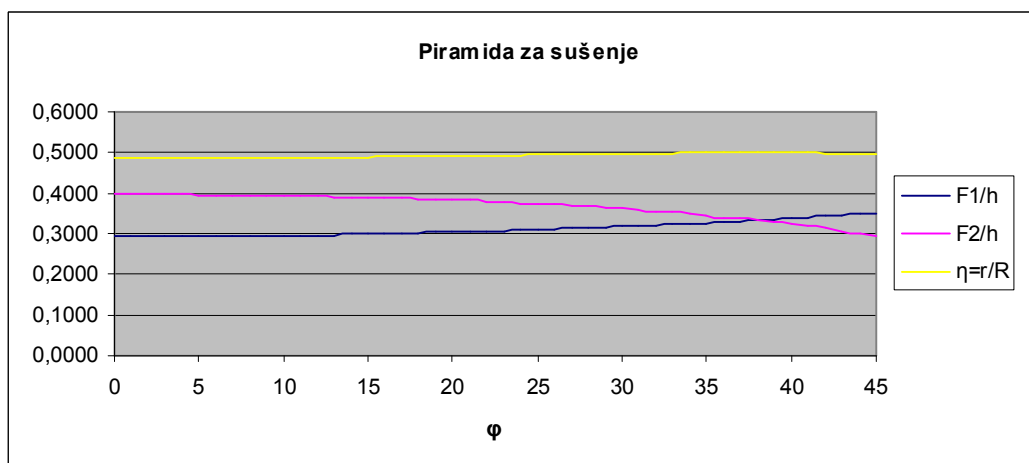
Iz njega se može izračunati pripadni prikloni kut četverostrane piramide za sušenje prema izrazu

$$\alpha = \arccos \frac{1}{n_{H0}} = \arccos \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 65^\circ 32'.$$

Tablica 1 – Elementi geometrije polja piramide za sušenje ($n_{H0} = 2,414$) u ovisnosti o kutu poprečnog presjeka φ

φ	$n_{H\varphi}$	$F_{1\varphi}/h$	$F_{2\varphi}/h$	r_φ/R_φ
0°	2,4142	0,2929	0,3964	0,4853
5°	2,4066	0,2935	0,3957	0,4857
10°	2,3839	0,2955	0,3932	0,4870
15°	2,3463	0,2988	0,3890	0,4891
20°	2,2943	0,3036	0,3827	0,4918
25°	2,2285	0,3097	0,3739	0,4947
30°	2,1497	0,3175	0,3619	0,4976
35°	2,0591	0,3269	0,3457	0,4996
40°	1,9579	0,3381	0,3235	0,4998
45°	1,8478	0,3512	0,2929	0,4966

Ovisnosti pojedinih elemenata geometrije polja piramide za sušenje o tlocrtnom kutu φ prema osi S-J trokuta poprečnog presjeka predočene su dijagramom.



Za piramidu za sušenje, čiji je nazivni hiperindeks loma $n_{H0} = 1 + \sqrt{2} = 2,414\dots$, raspon središnje zone rezultirajućeg mikrovalnog polja unutar koje treba postaviti eksponirani uzorak je:

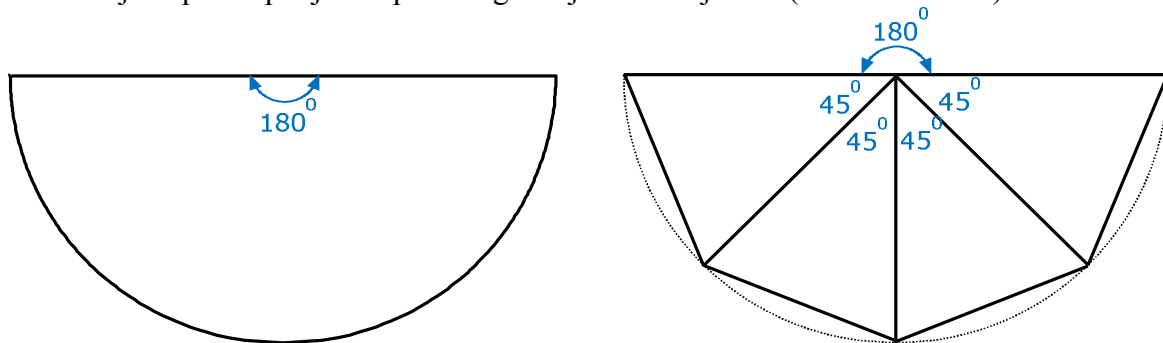
$$h_1 = \frac{h}{2 + \sqrt{2}} = 0,293 \cdot h \quad \text{do} \quad h_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2})^2 - 2}{(1 + \sqrt{2})^2 - 1} = 0,396 \cdot h.$$

Zanimljivo je da upravo piramidu s prikloim kutom plašta od 65° , ili kutom nagiba od vertikale za 25° , pri kojem se usredotočeno mikrovalno polje uspostavlja oko jedne dvostruke točke kao žarišta, navode inženjer Karel Drbal i još neki autori kao dehidracijski veoma djelotvornu i stoga najpodesniju za sušenje i mumifikaciju.

Držim da je tim davnim neospornim empirijskim rezultatom Karela Drbala, uvaženog dugogodišnjeg istraživača polja piramida i nenadmašenog eksperimentatora, vjerodostojno potvrđena ispravnost ovog teorijskog razmatranja i utemeljenost mojih polaznih pretpostavki o tijesnoj svezi vertikalne rasprostranjenosti usredotočenog mikrovalnog polja sa središtem opisane i upisane kružnice (kugle).

Osobitost razvijenog plašta stošca i piramide za sušenje

Razvijeni plašt stošca za sušenje i piramide za sušenje pokazuju jednu zanimljivu osobitost – da tvore ispruženi kut od 180° , kao što je prikazano na slici. Čini se da ima mjesta pretpostavci da je to opća zakonitost koji vrijedi za sve pravilne poliedre, počevši od jednakostraničnog tetraedra ($n_{str} = 3$), preko četverostrane piramide ($n_{str} = 4$) pa sve do stošca ($n_{str} = \infty$) uz koju se u njima postiže najmanja protežnost i stoga najveća jakost usredotočenog mikrovalnog polja. Ta (pretpostavljena) zakonitost omogućuje jednostavnu geometrijsku konstrukciju njihova razvijena plašta podjelom polukruga na jednake dijelove (ucrtane trokute).



Slika 4 – Kut razvijenog plašta stošca za sušenje i piramide za sušenje je ispruženi kut od 180°

Vršni kut trokuta plašta piramide (za sušenje) može se izračunati prema izrazu

$$\omega = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n_{H0}} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 45^\circ$$

pa razvijeni kut njezina plašta iznosi $4 \times 45^\circ = 180^\circ$.

Kut razvijenog plašta stošca (za sušenje) može se izračunati prema izrazu

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{n_H} = \frac{360^\circ}{n_H} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$